

9. cvičení - teorie

Jak na parciální zlomky: <https://math.fel.cvut.cz/mt/txtld/3/txc3db3i.htm>

Rozklad na parciální zlomky

- funguje v případě, že čítec je nižšího řádu, než jmenovatel - pokud tomu tak není, tak nejdřív provedeme dělení polynomu polynomem
- jmenovatele rozložíme na součin - co nejvíc to jde, dostanu nejvýše kvadratické činitele (mohou se hodit reciproké rovnice - viz níže)
- napíšu *zadaný zlomek* = součet zlomků takto:
 - ve jmenovateli je $(ax + b)^n \implies$ napravo napíšu $\frac{A_1}{ax+b} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$
 - ve jmenovateli je $(ax^2 + bx + c)^n \implies$ napravo napíšu $\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \dots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$
- získanou rovnici přenásobím jmenovatelem
- dosadím nulové body $\rightarrow$ určím tak pár koeficientů
- upravím do tvaru $\dots = (\dots)x^n + (\dots)x^{n-1} + \dots + (\dots)x + (\dots)$
- porovnám koeficienty u stejných mocnin $x \rightarrow$ soustava
- vyřeším soustavu $\rightarrow$ dostanu hodnoty A_i, B_i

Poznámka. Při rozkladu jmenovatele: pokud kvadratický trojčlen lze rozložit na součin, tak jej rozložíme (jinak by mohl vyjít zlomek, který nelze zintegrovat, resp. je potřeba ho opět rozložit na parciální zlomky).

Fakt. Každý polynom lze rozložit na součin polynomů druhého a prvního stupně.

Návod/nápověda

- čítec alespoň stejného stupně, než jmenovatel $\rightarrow$ dělení mnohočlenu mnohočlenem
- rozklad na parciální zlomky
- $\int \frac{1}{(ax+b)^n} dx \rightarrow$ substituce
- $\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^n} dx \rightarrow$ substituce
- $\int \frac{1}{ax^2+b} dx \rightarrow$ substitucí převedeme na $\int \frac{1}{y^2+1} dy$
- $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx \rightarrow$ doplněním na čtverec, převedeme na předchozí případ
- $\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^n} dx \rightarrow \int \frac{1}{(u^2+1)^n} du \rightarrow$ substituce $u = \tan t$

Pokračování na další straně.

Reciproké rovnice

Definice. Uvažme rovnici $a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, kde $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.

Pokud $a_k = a_{n-k}$ pro $k = 0, \dots, n$, pak je rovnice **reciproká rovnice 1. druhu**.

Pokud $a_k = -a_{n-k}$ pro $k = 0, \dots, n$, pak je rovnice **reciproká rovnice 2. druhu**.

Poznámka. 1. druh: první a poslední koeficient se rovnají, druhý a předposlední se rovnají, atd. ...

2. druh: první a poslední koeficient se ve znaménku, druhý a předposlední se liší ve znaménku, atd. ...

Příklad.

1. druh: $2x^4 - x^3 + 5x^2 - x + 2 = 0$

2. druh: $3x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 2x - 3 = 0$

Pokud by v poslední rovnici místo 0 bylo jiné číslo, tak by nešlo o reciprokou rovnici - 1. druhu být nemůže, neboť $a_4 \neq a_0$, a 2. druhu být nemůže, neb $a_2 \neq -a_2$ ($n = 4, k = 2$).

Platí následující:

- Je-li x kořenem reciproké rovnice, pak i $\frac{1}{x}$ je kořenem reciproké rovnice
- 1. druh lichý stupeň $\implies -1$ je kořen
- 1. druh sudý stupeň $\implies$ vytkneme $x^{\frac{n}{2}}$ a užijeme substituci $y = x + \frac{1}{x}$
- 2. druh $\implies 1$ je kořen

Postup: Rovnici vydělíme $(x - \text{kořen})$ nebo $x^{\frac{n}{2}}$ - podle toho o jaký typ rovnice jde (viz výše). Dostaneme reciprokou rovnici nebo rovnici, kterou již umíme vyřešit a postupujeme dál.

Příklad. Vyřešte rovnici $3x^5 + 16x^4 + 29x^3 + 29x^2 + 16x + 3 = 0$ nad $\mathbb{R}$.

Řešení. Zřejmě jde o rovnici 1. druhu lichého stupně. Rovnice by tedy, dle výše uvedeného, kořen -1 (lze ověřit dosazením).

$$3x^5 + 16x^4 + 29x^3 + 29x^2 + 16x + 3 = 0 \quad / : (x + 1) \rightarrow \text{kořen } -1$$

$$3x^4 + 13x^3 + 16x^2 + 13x + 3 = 0$$

Dostali jsme rovnici 1. druhu sudého stupně. Proto rovnici vytkneme x^2 a provedeme substituci $y = x + \frac{1}{x}$.

$$3x^4 + 13x^3 + 16x^2 + 13x + 3 = x^2 \left(3x^2 + 13x + 16 + \frac{13}{x} + \frac{3}{x^2} \right)$$

$$y = x + \frac{1}{x}, \quad y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$\text{pak } 3x^2 + 13x + 16 + \frac{13}{x} + \frac{3}{x^2} = 13 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 3 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 16 = 13y + 3(y^2 - 2) + 16 =$$

$$= 3y^2 + 13y + 16 - 6 = 3y^2 + 13y + 10 = (y + 1)(3y + 10) = \left(x + \frac{1}{x} + 1 \right) \left(3x + \frac{3}{x} + 10 \right)$$

$$\implies 3x^4 + 13x^3 + 16x^2 + 13x + 3 = x \left(x + \frac{1}{x} + 1 \right) x \left(3x + \frac{3}{x} + 10 \right) = (x^2 + x + 1)(3x^2 + 10x + 3) = \\ = (x^2 + x + 1)(3x + 1)(x + 3)$$

Z rozkladu je vidno, že rovnice $3x^4 + 13x^3 + 16x^2 + 13x + 3 = 0$ má kořeny $-\frac{1}{3}, -3$.

Celkově má zadaná rovnice kořeny: $-3, -1, -\frac{1}{3}$.